UAA 3 : Calcul intégral

Exercices supplémentaires

A. Primitives d'une fonction

(1) Décomposition linéaire

Calcule les primitives suivantes :

(1) $\int \left(x^3+2x^2+x+1\right)dx$ $\quad = \frac{x^4}{4}+\frac{2}{3}x^3+\frac{x^2}{2}+x+C$

(2) $\int \frac{x}{x^2-1}dx$ $\quad = \frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right|+C$

(3) $\int \frac{1+\cos x}{x+\sin x}dx$ $\quad = \ln\left|x+\sin x\right|+C$

(4) $\int \sin^2 x.\cos x\ dx$ $\quad = \frac{1}{3}\sin^3 x+C$

(5) $\int \frac{x^3}{5x^4+1}dx$ $\quad = \frac{1}{20}\ln\left|5x^4+1\right|+C$

(6) $\int x^3\sqrt{x^4+2}\ dx$ $\quad = \frac{1}{4}\sqrt{\left(x^4+2\right)^3}+C$

(7) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}dx$ $\quad = \frac{2}{3}\sqrt{1+x^3}+C$

(8) $\int \frac{x}{1+x^4}dx$ $\quad = \frac{1}{2}\arctan x^2+C$

(9) $\int \frac{\sin x-\cos x}{4+\sin x+\cos x}dx$ $\quad = -\ln\left|4+\sin x+\cos x\right|+C$

(10) $\int \frac{-4}{3x^5}dx$ $\quad = \frac{1}{3x^4}+C$

(11) $\int 3(3x+1)^4\,dx$ $\quad = \dfrac{(3x+1)^5}{5}+C$

(12) $\int \dfrac{1}{x^2}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^4 dx$ $\quad = -\dfrac{1}{5}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^5+C$

(13) $\int \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}dx$ $\quad = \dfrac{1}{\cos x}+C$

(14) $\int \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx$ $\quad = \sqrt{x^2-1}+C$

(15) $\int \dfrac{x+1}{x^2+2x+2}dx$ $\quad = \dfrac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right|+C$

(16) $\int e^{3x+2}dx$ $\quad = \dfrac{1}{3}e^{3x+2}+C$

(17) $\int \dfrac{1}{x.\ln x}dx$ $\quad = \ln\left|\ln|x|\right|+C$

(18) $\int \left(1-\dfrac{x}{4}\right)dx$ $\quad = x-\dfrac{x^2}{8}+C$

(19) $\int \cos\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)dx$ $\quad = \dfrac{1}{3}\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)+C$

(20) $\int (x-5)^2\,dx$ $\quad = \dfrac{1}{3}(x-5)^3\,dx$

(21) $\int 2x.e^{x^2-1}dx$ $\quad = e^{x^2-1}+C$

(22) $\int (2-x)\sqrt{x^2-4x}\,dx$ $\quad = -\dfrac{1}{3}\sqrt{\left(x^2-4x\right)^3}+C$

(23) $\int x^4.\left(1-x^5\right)^2 dx$ $\quad = -\dfrac{\left(1-x^5\right)^3}{15}+C$

(24) $\int \dfrac{-1}{2x}dx$ $\quad = -\dfrac{1}{2}\ln|x|+C$

(25) $\int \dfrac{1}{1-3x}dx$ $\quad = -\dfrac{1}{3}\ln|1-3x|+C$

(26) $\int \frac{1}{\arccos x\sqrt{1-x^2}}dx \qquad = -\ln\left|\arccos x\right| + C$

(27) $\int \sin x.\cos^5 x\,dx \qquad = -\frac{1}{6}\cos^6 x + C$

(28)

(2) Intégration par substitution

1. $\int \frac{x^2}{x+1}dx$ poser $u=x+1$ $=\frac{1}{2}(x+1)^2-2.(x+1)+\ln|x+1|+C$

2. $\int x^2\sqrt{1-x}\,dx$ poser $u=1-x$ $=-\frac{2}{3}\sqrt{(1-x)^3}+\frac{4}{5}\sqrt{(1-x)^5}-\frac{2}{7}\sqrt{(1-x)^7}+C$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ poser $u=x-1$ $=\arcsin(x-1)+C$

4. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$ poser $x=\sin u$ $=-\cot(\arcsin x)+C$

5. $\int \sqrt{9-25x^2}\,dx$ poser $x=\frac{3}{5}\sin u$ $=\frac{9}{10}\arcsin\frac{5x}{3}+\frac{9}{20}\sin\left(2.\arcsin\frac{5x}{3}\right)+C$

6. $\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ poser $u=\cos x$ $=-\arctan(\cos x)+C$

7. $\int \frac{x}{(1+x)^3}dx$ poser $u=1+x$ $=-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2(1+x)^2}+C$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}$ poser $u=1+\sqrt{x}$ $=\frac{4}{3}\sqrt{\left(1+\sqrt{x}\right)^3}-4\sqrt{1+\sqrt{x}}+C$

9. $\int \sin\sqrt{x}\;dx$ poser $u^2=x$ $=-2\sqrt{x}.\cos\sqrt{x}+2\sin\sqrt{x}+C$

10. $\int \frac{e^x}{25+e^{2x}}dx$ poser $u=e^x$ $=\frac{1}{5}\arctan\left(\frac{e^x}{5}\right)+C$

11. $\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ poser $u=\cos x$ $=-\arctan(\cos x)+C$

12. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx$ poser $u=\sqrt{e^x+1}$ $=\frac{1}{3}\left(\sqrt{e^x+1}\right)^3-\sqrt{e^x+1}+C$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$ poser $u=x-1$ $=\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x-1)\right)+C$

14. $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$ poser $u=\tan x$ $=\sqrt{2}.\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\tan x\right)+C$

15. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ poser $u = \sqrt{x}$ $= 4\left(\sqrt{x}.\ln \sqrt{x} - \sqrt{x}\right) + C$

16. $\int \frac{dx}{e^x + 1}$ poser $u = e^{-x}$ $= -\ln\left(1 + e^{-x}\right) + C$

(3) Intégration par parties

1. $\int x^2.\cos(2x)\,dx \qquad = \frac{x^2}{2}\sin(2x) + \frac{x}{2}\cos(2x) - \frac{1}{4}\sin(2x) + C$

2. $\int \frac{x.e^{2x}}{(2x+1)^2}\,dx \qquad = \frac{-x.e^{2x}}{2.(2x+1)} + \frac{e^{2x}}{4} + C$

3. $\int x.\arctan x\;dx \qquad = \frac{1}{2}x^2.\arctan x - \frac{1}{2}x + \arctan x + C$

4. $\int 2xe^x dx \qquad = 2x.e^x - 2e^x + C$

5. $\int (1+x)\cos x\,dx \qquad = (1+x).\sin x + \cos x + C$

6. $\int x(\ln x - 1)\,dx \qquad = \frac{x^2}{2}.(\ln x - 1) - \frac{x^2}{4} + C$

7. $\int e^{1-x}.x\,dx \qquad = -x.e^{1-x} - e^{1-x} + C$

8. $\int \ln^2 x\,dx \qquad = x.\ln^2 x - 2x.\ln x + 2x$

9. $\int (2x+1)e^x dx \qquad = (2x+1)e^x - 2e^x + C$

10. $\int (x^2 - x)\ln x\,dx \qquad = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right).\ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{4} + C$

11. $\int x^3 e^{3x} dx \qquad = \frac{1}{3}x^3.e^{3x} - \frac{1}{3}x^2 e^{3x} + \frac{2}{9}xe^{3x} - \frac{2}{27}e^{3x} + C$

12. $\int \cos(\ln x)\,dx \qquad = \frac{1}{2}\left(x.\cos(\ln x) + x.\sin(\ln x)\right) + C$

13. $\int x.\sin(2x)\,dx \qquad = -\frac{x}{2}.\cos(2x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + C$

14. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx \qquad = \ln(\ln x).\ln x - \ln x + C$

15. $\int \ln(1+x)\,dx \qquad = x.\ln(1+x) - x - \ln(1+x) + C$

16. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx \qquad = 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + C$

17. $\int x^2 \cos x\, dx \qquad = x^2.\sin x + 2x.\cos x - 2\sin x + C$

18. $\int x^3.\sin\left(x^2\right) dx \qquad = -\frac{x^2}{2}.\cos\left(x^2\right) + \frac{1}{2}.\sin\left(x^2\right) + C$

19. $\int e^{2x}.\sin\left(3x\right) dx \qquad = -\frac{3}{13}e^{2x}.\cos\left(3x\right) + \frac{2}{13}e^{2x}.\sin\left(3x\right) + C$

20. $\int x\sin^2 x dx \qquad = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{4}.\sin\left(2x\right) - \frac{1}{8}.\cos\left(2x\right) + C$

(4) Intégration par décomposition en fractions rationnelles simples

Calcule les primitives suivantes :

(1) $\displaystyle\int \frac{x^3+2x-1}{x^2+x+2}dx = \frac{(x-1)^2}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+2\right)+\frac{1}{\sqrt{7}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{7}}+C$

(2) $\displaystyle\int \frac{x^3-x+1}{1+x^2}dx = \frac{x^2}{2}-\ln\left(1+x^2\right)+\arctan x + C$

(3) $\displaystyle\int \frac{5x^2}{(1+x)\left(4+x^2\right)}dx = \ln|1+x|+2\ln\left|4+x^2\right|-2\arctan\frac{x}{2}+C$

(4) $\displaystyle\int \frac{2x^2-3x+4}{(x-1)^2}dx = 2x+\ln|x-1|-\frac{3}{x-1}+C$

(5) $\displaystyle\int \frac{x}{\left(x^2-4\right)^2}dx = -\frac{3}{112}\ln|x-2|-\frac{1}{14(x-2)}+\frac{3}{112}\ln|x+2|+\frac{5}{28(x+2)}+C$

(6) $\displaystyle\int \frac{24x^3+18x^2+10x-9}{(3x-1)(2x+1)^2}dx = 2x-\frac{\ln|3x-1|}{3}+\frac{\ln|2x+1|}{2}-\frac{5}{2(2x+1)}+C$

(7) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{(2x+1)^2}dx = \frac{1}{2}\ln|2x+1|+\frac{1}{2x+1}+C$

(8) $\displaystyle\int \frac{x}{\left(x^2-4\right)^2}dx = -\frac{1}{8(x-2)}+\frac{1}{8(x+2)}+C$

(9) $\displaystyle\int \frac{5x^3-3}{x(x-2)}dx = \frac{5x^2}{2}+10x+\frac{3}{2}\ln|x|+\frac{37}{2}\ln|x-2|+C$

(10) $\displaystyle\int \frac{1}{x(x-2)}dx = \ln|x|-\ln|x-2|+C$

(5) Fonctions trigonométriques

1. $\int \frac{dx}{1+\cos(2x)} = \frac{1}{2}\tan x + C$

2. $\int \cos(3x).\cos(4x)\,dx = \frac{1}{14}\sin(7x) + \frac{1}{2}\sin x + C$

3. $\int \sin^2 x.\cos^2 x\,dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin(4x) + C$

4. $\int \sin(2x).\cos(3x)\,dx = -\frac{1}{10}\cos(5x) + \frac{1}{2}\cos x + C$

5. $\int \sin(3x).\sin(2x)\,dx = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{10}\sin(5x) + C$

6. $\int \cos^5 x\,dx = \frac{3}{8}\sin x + \frac{5}{48}\sin(3x) + \frac{1}{80}\sin(5x) + C$

7. $\int \frac{\cos^3 x}{1-\sin x}dx = \sin x - \frac{1}{4}\cos(2x) + C$

8. $\int \sin^2 x.\cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{4}x - \frac{1}{16}\sin(4x) + C$

9.

(6) Primitives, techniques mélangées

1. $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx \qquad = \arctan^2 x + C$

2. $\displaystyle\int \frac{\ln^9 x}{x}dx \qquad = \frac{\ln^{10} x}{10} + C$

3. $\displaystyle\int x^2.e^{5x}dx \qquad = \frac{e^{5x}}{5}\left(x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{2}{25}\right) + C$

4. $\displaystyle\int \frac{\sin(2x)}{1+\sin^2 x}dx \qquad = \ln\left|\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)\right| + C$

5. $\displaystyle\int \frac{2x-5}{\sqrt{4-x^2}}dx \qquad = -4\cos\left(\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right) - 5\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + C$

6. $\displaystyle\int \frac{x^3+3x^2-x-1}{x+1}dx \qquad = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + 3.\ln|x+1| + C$

7. $\displaystyle\int \tan(2x)dx \qquad = -\frac{1}{2}\ln|\cos(2x)| + C$

8. $\displaystyle\int e^{3-x}dx \qquad = -e^{3-x} + C$

9. $\displaystyle\int x;\sin x.\cos x\,dx \qquad = \frac{1}{2}x.\sin^2 x - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\sin(2x) + C$

10. $\displaystyle\int 3\left(\sqrt{x} + \sin x\right)dx \qquad = 2\sqrt{x^3} - 3.\cos x + C$

11. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x-2}dx \qquad = x + 3.\ln|x-2| + C$

12. $\displaystyle\int \sin(\ln x)dx \qquad = \frac{1}{2}\left(x.\sin(\ln x) - x.\cos(\ln x)\right) + C$

13. $\displaystyle\int \frac{2}{3-7x}dx \qquad = -\frac{2}{7}\ln|3-7x| + C$

14. $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2.(x+1)^2}dx \qquad = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + C$

15. $\displaystyle\int \tan(3x)dx \qquad = -\frac{1}{3}\ln|\cos(3x)| + C$

D. Applications du calcul intégral

1. Si $\int_0^3 x^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a.\cos x \, dx$, que vaut a ?

   Sol : $a = 9$

1. Aire d'une surface délimitée par l'axe des abscisses et une ou plusieurs courbes

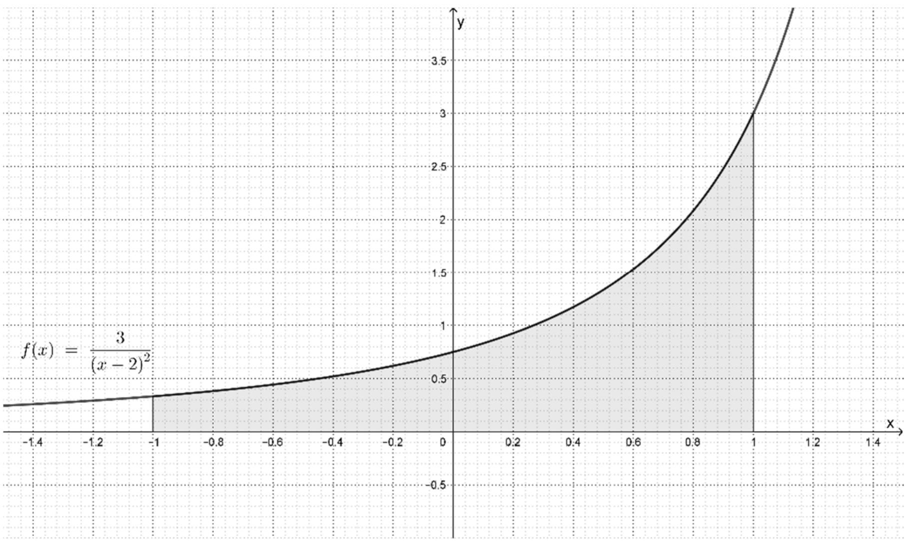
1. Calcule l'aire de la surface comprise entre la courbe $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ et l'axe des abscisses.
   Sol : 8 u.a.

2. Calcule l'aire de la surface comprise entre la courbe $y = -x + 5 - \dfrac{4}{x}$ et l'axe des abscisses.
   Sol : 1,95 u.a.

3. Calcule l'aire de la surface délimitée par la courbe de la fonction $f(x) = \dfrac{2.\ln x}{x} + x - 1$, l'axe des abscisses et les droites $x = 1$ et $x = e$. On sait que $f(x) \geq 0$ sur $[1; +\infty[$.
   Sol : 2,48 u.a.

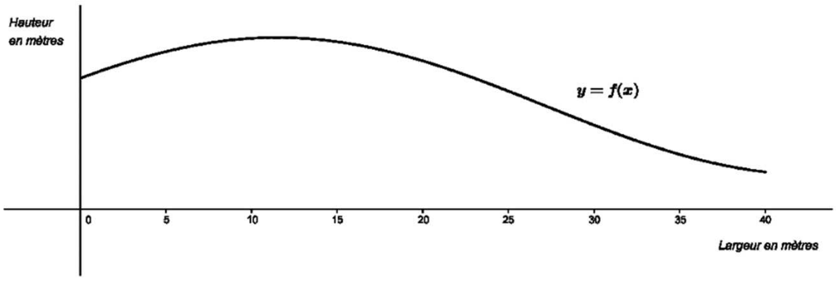
4. Calcule l'aire de la surface délimitée par le graphique de la fonction $f(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -3$ et $x = 0$.
   Sol : 0,64 u.a.

5. Calcule l'aire grisée.



   Sol : 2 u.a.

6. Un étudiant en architecture a dessiné une façade en verre de 40 mètres de large en utilisant pour la partie supérieure le graphique de la fonction $f\left(x\right)=4.\cos\left(\dfrac{x}{10}-10\right)+6$.



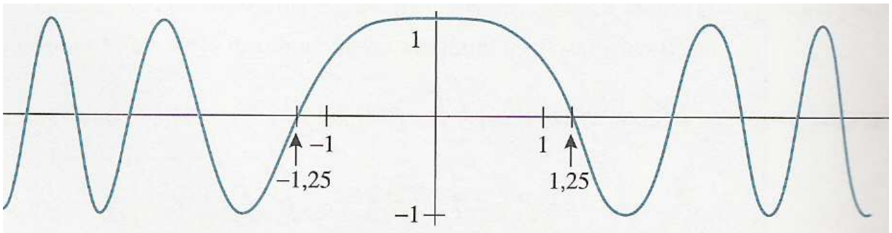
Combien mesure l'aire de cette façade, au mètre carré près ?

Sol : 229,42 m²

7. Voici le graphique de la fonction $f(x)=\cos(x^2)$.

On donne $\int_0^{1,25} f(x)dx = 0{,}98$ et $\int_0^{1} f(x)dx = 0{,}90$.

Déduis-en



(1) $\int_1^{1,25} f(x)dx$

(2) $\int_{-1}^{1} f(x)dx$

(3) $\int_{1,25}^{0} f(x)dx$

(4) $\int_{1,25}^{-1} f(x)dx$

2. Aire d'une surface délimitée par deux courbes

1. Calcule l'aire de la surface délimitée par les graphiques des fonctions suivantes :

(1) $f(x)=\frac{3}{2}(x+1)$ et $g(x)=x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$

Sol : $\frac{4}{3}$ u.a.

(2) $f(x)=2$ et $g(x)=x^2-3x$

Sol : $\frac{13}{6}$ u.a.

(3) $f(x)=x$ et $g(x)=2x^3+2x^2-3x$

Sol : $\frac{37}{6}$ u.a.

(4) $f(x)=x^3+x^2-4x$ et $g(x)=x^2$

Sol : 8 u.a.

(5) $f(x)=-\sqrt{x}$ et $g(x)=-1$

Sol : $\frac{1}{3}$ u.a.

(6) $f(x)=x^2+5$ et $g(x)=4x+5$

Sol : $\frac{32}{3}$ u.a.

2. Détermine l'aire de la surface délimitée par le graphique des fonctions $f(x)=x$ et $g(x)=x^3$.

Sol : $\frac{1}{2}$ u.a.

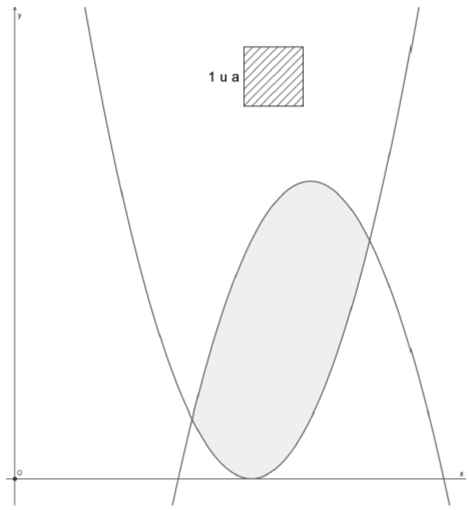
3. (1) Représente, dans un repère orthonormé, les graphiques des fonctions $f(x)=-(x-2)^2$ et $g(x)=\frac{x^2}{4}-2x$.

(2) Détermine l'aire de la surface délimitée par ces deux fonctions, **l'axe des abscisses** et les droites d'équation $x=0$ et $x=2$. Colorie cette surface sur le graphique.

Sol :

4. Dans un repère orthonormé, voici les graphiques de deux fonctions : $f(x) = (x-4)^2$

et $g(x) = -x^2 + 10x - 20$.



Calcule la mesure de l'aire de la surface grisée.

Sol : 9 u.a.

5. Calcule l'aire de la surface délimitée par les graphiques de deux fonctions :

(1) $f(x) = 2x - x^2$ et $g(x) = -x$

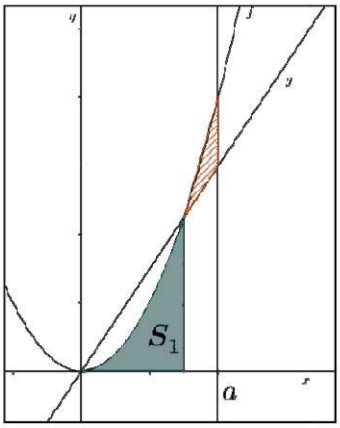
Sol : $\frac{9}{2}$ u.a.

(2)

6. Détermine la valeur de m pour que l'aire de la surface comprise entre la parabole d'équation $y = -x^2 + m$ et l'axe des abscisses soit égale à $\frac{32}{3}$ u.a.

Sol : $m = 4$

7. Voici la représentation graphique de $f(x) = x^2$ et de $g(x) = \frac{3}{2}x$, dans un repère orthonormé.



(1) Calcule l'aire de la surface S_1 coloriée en gris. *Sol* : $\dfrac{9}{8}$ u.a.

(2) Soit a un réel strictement supérieur à 1.

Pour quelle valeur de a l'aire de la surface hachurée est-elle égale à $\dfrac{9}{16}$ u.a. ?

Sol : $a=\dfrac{9}{4}$

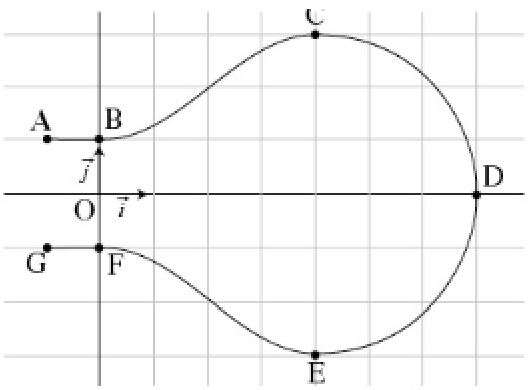
3. Volume d'un solide de révolution

1. Calcule le volume du solide engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la surface limitée par Ox, Oy, la droite $x=1$ et la courbe d'équation $y=\dfrac{x^2}{2}+x-3$.

   Sol : $V=\dfrac{169\pi}{30}$ u.v.

2. On modélise la section d'une ampoule basse consommation à l'aide de la figure ci-dessous.

   On a : $A(-1;1)$, $B(0;1)$, $C(4;3)$, $D(7;0)$, $E(4;-3)$, $F(0;-1)$ et $G(-1;-1)$.



La partie de la courbe située au-dessus de l'axe des abscisses se décompose comme suit :

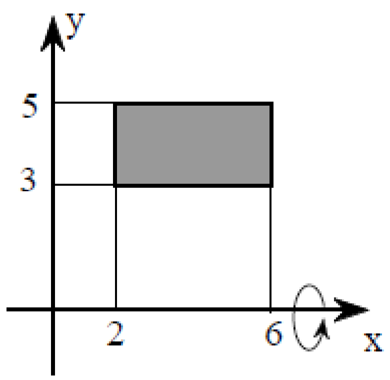
- la portion située entre les points A et B est la représentation graphique de la fonction constante $h(x)=1$ sur l'intervalle $[-1;0]$;
- la portion située entre les points B et C est la représentation graphique d'une fonction de la forme $f(x)=a+b.\sin\left(c+\frac{\pi}{4}x\right)$ sur l'intervalle $[0;4]$ où a, b et c sont des réels non nuls avec $c\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$;
- la portion située entre les points B et C est un quart de cercle de diamètre $[CE]$.

La partie de la courbe située en-dessous de l'axe des abscisses est obtenue par symétrie par rapport à cet axe.

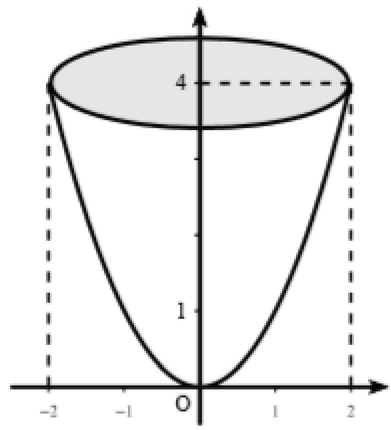
(1) Détermine la valeur des réels a, b, c sachant qu'on impose que les tangentes aux points B et C à la représentation graphique de la fonction de la fonction f soient parallèles à l'axe des abscisses.

(2) Calcule le volume de l'ampoule.

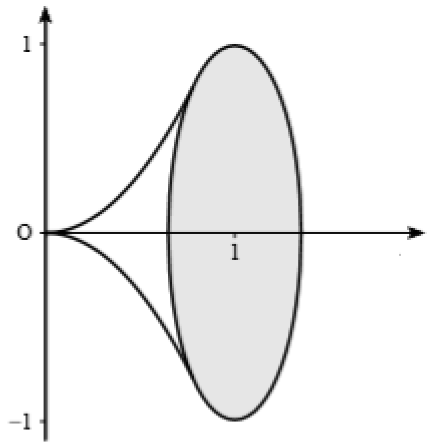
3. Représente l'objet obtenu par la révolution de la surface grisée autour de Ox, en respectant les dimensions données par le schéma.



4. Calcule le volume V du phare ci-contre obtenu par révolution autour de l'axe Oy du morceau de parabole d'équation $y=x^2$ $(0\le x\le 2)$.



5. Détermine le volume de la trompette obtenue par révolution autour de l'axe *Ox* du morceau de parabole d'équation $y = x^2$ avec $0 \leq x \leq 1$.



5. Théorème de la moyenne

1. Calcule la valeur moyenne de la fonction *f* sur l'intervalle donné.

(1) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $\left[\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right]$ — *Sol* : $\ln 3$

(2) $f(x) = \cos x$ sur $\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]$ — *Sol* : $\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$

(3) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $[-1;1]$ — *Sol* : $\dfrac{\pi}{4}$

(4) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ sur $[4;9]$ — *Sol* : $\dfrac{4}{5}$

(5) $f(x) = 2^x$ sur $[-2;2]$ — *Sol* : $\dfrac{3}{16\ln 2}$

2. Un météorologiste estime que la température T en fonction de l'heure h d'une journée d'hiver est donnée par la fonction $T(h)=\frac{1}{36}h(h-12)(h-24)-18$ où $h=0$ correspond à minuit.
   Calcule la température moyenne entre 6h du matin et midi.
   Sol : -7,5°C

3. La vitesse d'un automobiliste, en km/h, est donnée par la fonction $V(x)=100-\frac{5000}{x+50}$ où x est le temps en heure.
   Calcule sa vitesse moyenne entre 2 et 5 heures.
   Sol :

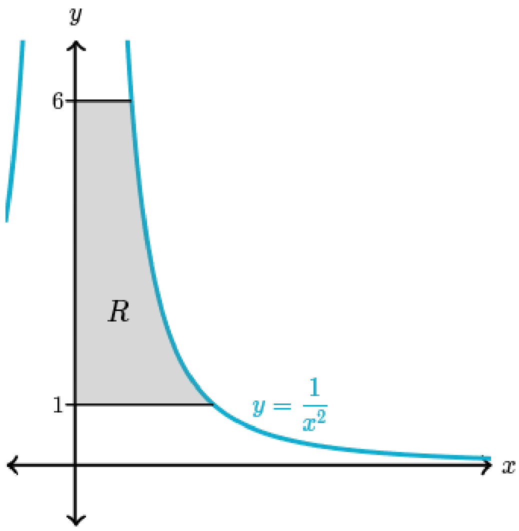
4. Un mobile se déplace à la vitesse $v(t)=-t^2+1$ pied par seconde entre $t=0$ et $t=2$.
   Détermine la vitesse moyenne du mobile entre $t=0$ et $t=2$.

5. On injecte 3 mg d'un produit dans le sang. La quantité $Q(t)$ de produit encore présent dans le sang t heures après l'injection est donnée par $Q(t)=3.e^{-0,1t}$ avec $t\in[0;20]$.
   (1) Calcule la quantité moyenne de produit dans le sang entre 0 et 20h.
   Sol : 1,297 mg
   (2) Calcule le temps après lequel cette quantité moyenne est effectivement présente dans le sang.
   Sol : 8,39h

6. Jo-Bernard produit du jus de patates pour alimenter de nouveaux moteurs écologiques et innovants. Le profit de la firme pour produire x hectolitres de jus de patates est une fonction f définie par : $f(x)=4000-x-\frac{3000000}{x}$. Trouve le profit moyen lorsque x varie entre 1 000 et 3 000, soit : $P_M=\frac{1}{2000}\int_{1000}^{3000}f(x)\,dx$.

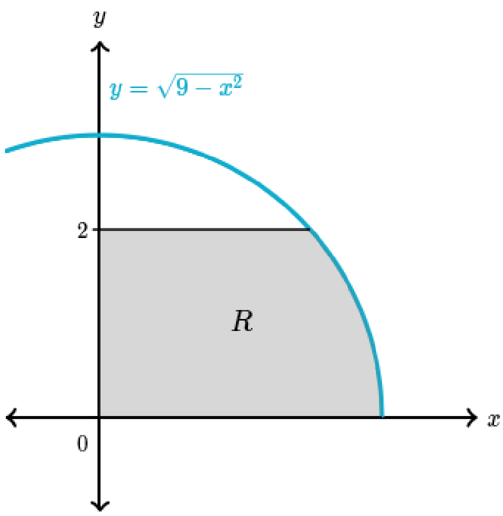
6. Volume d'un solide de révolution autour de l'axe des ordonnées

1. Soit R la surface délimitée par la courbe d'équation $y=\dfrac{1}{x^2}$, l'axe des ordonnées et les droites d'équation $y=1$ et $y=6$.



Calcule le volume du solide engendré par la rotation de R autour de l'axe des ordonnées.
Sol : $\pi.\ln 6$ u.v.

2. Soit R la surface délimitée par la courbe d'équation $y=\sqrt{9-x^2}$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $y=2$.



Calcule le volume du solide engendré par la rotation de R autour de l'axe des ordonnées.

Sol : $\dfrac{46\pi}{3}$ u.v.

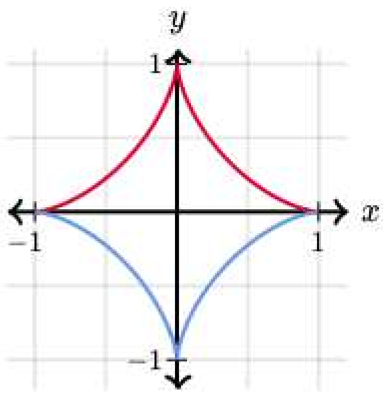
7. Longueur d'un arc de courbe

1. Détermine la longueur de l'arc de la courbe représentative de la fonction f définie par

   $f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ sur l'intervalle $[0;3]$.

   Sol : $\frac{14}{3}$ u.l.

2. Détermine la longueur de la portion supérieure de l'astroïde d'équation $x^{2/3}+y^{2/3}=1$ tracée ci-dessous.

   Sol : 3 u.l.

3. Détermine la longueur de l'arc de la courbe représentative de la fonction f définie par

   $f(x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x$ pour $x\in[1;e]$.

   Sol : $\frac{e^2+1}{4}$ u.l.

4. Détermine la longueur de l'arc de la courbe représentative de la fonction f définie par

   $f(x)=2(x-3)^{3/2}$ pour $x\in\left[3;\frac{10}{3}\right]$.

   Sol : $\frac{14}{27}$ u.l.

9. Applications diverses

1. On estime que dans quelques années, la population de certaines communautés riveraines évoluera au rythme de $0,6t^2+0,2t+0,5$ milliers de personnes par an.

   Les environnementalistes ont déterminé que le niveau de pollution dans le lac augmente environ de 5 unités pour 1000 habitants.

   De combien la population dans le lac va-t-elle augmenter durant les deux prochaines années ?

   Sol : Soit $P(t)$ la population t années à partir de maintenant.

   On a : $\dfrac{dP}{dt}=P'(t)=0,6t^2+0,2t+0,5$.

   Ainsi $P(t)=\int P'(t)\,dt=0,2t^3+0,1t^2+0,5t+C$

   Durant les deux prochaines années, la population augmentera de $P(2)-P(0)=3$ mille personnes.

   Donc, la population augmentera d'environ $5\times 3=15$ *unités.*

2. Bob part pour un voyage à 15 heures ($t=0$) et roule à la vitesse $v(t)=60-\dfrac{1}{2}t$ miles/heure, où t est mesuré en heures.

   Calcule $\displaystyle\int_0^2\left(60-\frac{1}{2}t\right)dt$ et explique ce que représente le résultat dans le contexte de l'exercice.

   Sol : Bob a parcouru 119 miles entre 15h et 17h.

3. Une voiture se déplace sur une route, elle démarre à l'instant $t=0$, puis accélère de façon régulière durant la première heure (c'est-à-dire que l'on suppose constante l'accélération qui est la dérivée de la vitesse). Après une heure de route, sa vitesse est alors de 80 km/h. Elle garde cette vitesse durant les deux heures suivantes puis décélère de façon régulière pour s'arrêter une demi-heure plus tard.
   (1) Dans un repère orthogonal, représente la vitesse v du véhicule en fonction du temps.
   (2) Détermine la distance parcourue durant ce trajet ainsi que la vitesse moyenne du parcours.

Indication : La distance parcourue entre les instants *0* et *T* est : $\int_0^T v(t)\,dt$.

4. Lors d'une émission télévisée, les téléspectateurs sont appelés à envoyer des messages téléphoniques par SMS, pendant une durée de 5 minutes.

   Pendant ces 5 minutes, les appels arrivent avec un débit variable en fonction du temps. Si x est le temps exprimé en minutes, le débit, exprimé en milliers d'appels par minute, est donné par la fonction f telle que

$$f(x)=\begin{cases}-4x^2+8x & \text{pour } x\in[0;1]\\ \ln x-x+5 & \text{pour } x\in[1;5]\end{cases}$$

   On veut calculer le nombre total d'appels reçus pendant ces 5 minutes, et on admet que ce nombre d'appels est donné par $\int_0^5 f(x)\,dx$.

   (1) Représente graphiquement la courbe représentative de la fonction f.

   (2) Vérifie que la fonction f est continue en 1.

   (3) Détermine le nombre total d'appels reçus pendant ces 5 minutes.

5. Une loi exponentielle permet de modéliser un phénomène sans usure, sans mémoire : le fait que le phénomène ait duré un certain temps ne change rien à son espérance de vie après ce temps.

   Lorsqu'une variable aléatoire suit une loi exponentielle de paramètre λ , sa fonction de densité est donnée par $f(x)=\lambda.e^{-\lambda x}$ avec $x\in[0;+\infty[$.

   Cette fonction permet de calculer des probabilités grâce à l'aire sous sa courbe. Par exemple, $p(T\le t)=\int_0^t f(x)\,dx$.

La durée de vie, en jours, d'un des composants électroniques d'une éolienne est modélisée par une variable aléatoire *T* qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda=0,002$.

(1) Le fabricant affirme : « la probabilité que la durée de vie du composant soit supérieure à 100 jours est d'au moins 0,8. »

Que penser de cette affirmation ? Explique ton raisonnement.

(2) Calcule l'espérance de vie du composant en calculant $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x t.f(t)\,dt$.

E. Pour aller plus loin

1. Calcule les primitives suivantes qui nécessitent l'utilisation de plusieurs techniques :

   (1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$

   - Substitution : poser $u = \sqrt{x}$
   - Décomposition en fractions rationnelles simples

   $Sol: = 2\sqrt{x} - 2\ln\left|\sqrt{x}+1\right| + C$

   (2) $\int \frac{dx}{x^2+4x}$

   - Substitution : poser $u = x+2$
   - Décomposition en fractions rationnelles simples

   $Sol: = \frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{4}\ln|x+4| + C$

   (3) $\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$

   - Substitution : poser $u = \sqrt{x}$
   - Décomposition en fractions rationnelles simples

   $Sol: = -x + 4\sqrt{x} - 4\ln\left|1+\sqrt{x}\right| + C$

   (4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$

   - Substitution : poser $u = \sqrt[4]{x}$
   - Décomposition en fractions rationnelles simples

   $Sol: = 2\sqrt{x} - 4.\sqrt[4]{x} + \ln\left|\sqrt[4]{x}+1\right| + C$

(5) $\int \frac{dx}{x^2+10x+16}$

- Substitution : poser $u = x+5$
- Décomposition en fractions rationnelles simples

Sol : $\frac{1}{6}\ln|x+2| - \frac{1}{6}\ln|x+8| + C$

(6) $\int \sqrt{-8+6x-x^2}\,dx$

- Substitution : poser $u = x-3$
- Substitution : poser $u = \sin t$

(7) $\int \frac{\ln^2 x}{x^2}\,dx$

- Substitution : poser $u = \ln x$
- Effectuer deux intégrations par parties

Sol : $\frac{-\ln^2 x}{2x^2} - \frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{2x^2} + C$

(8) $\int \arcsin^2 x\,dx$

- Intégration par parties
- Substitution : poser $x = \sin u$
- Effectuer une seconde intégration par parties

Sol : $x.\arcsin^2 x + 2\arcsin x.\cos(\arcsin x) - 2\sin(\arcsin x) + C$

(9) $\int x\sqrt{3-2x-x^2}\,dx$

- Substitution : poser $u = x+1$
- Substitution : poser $2\sin t = u$

Sol : $-\cos\left(\arcsin\frac{x+1}{2}\right) - 2\sin\left(2\arcsin\frac{x+1}{2}\right) + C$

2. Un irrigateur crée un rideau d'eau plan et perpendiculaire au sol. Dans ce plan *Oxy*, représenté ci-dessous, le rideau d'eau, émis à parti de l'origine, est compris entre le sol, d'équation $y=0$ et la parabole d'équation

$$y=f(x) \qquad \text{avec } f(x)=-\frac{x^2}{\cos^2\theta}+x.\tan\theta,$$

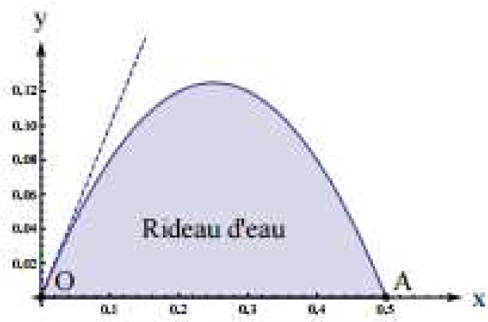
où θ est un paramètre strictement compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

(1) Calcule la pente de la tangente à la parabole à l'origine. Que représente le paramètre θ ?

(2) Calcule, en fonction de θ, les coordonnées du point d'intersection *A* entre le sol et la parabole.

(3) Calcule, en fonction de θ, la surface du rideau d'eau.

(4) Calcule la valeur du paramètre θ pour laquelle la surface du rideau d'eau est maximale.



3. Un car se trouve à 30 miles au nord d'une ville au temps $t=0$ (en heures) et sa vitesse vers le nord est donnée par $v(t)=60+5.\cos t+8.\sin t$ miles/h pour $0\le t\le 3$.

Où se trouve le car à $t=3$?

Sol : Soit $s(t)$ la distance du car au nord de la ville à l'instant *t*. Alors $s'(t)=v(t)$.

Ainsi, $s(t)=\int v(t)\,dt=60t+5.\sin t-8.\cos t+C$.

Comme $s(0)=-8+C$ et que l'on sait que $s(0)=30$, on en déduit que $C=38$.

D'où $s(t)=60t+5\sin t-8\cos t+38$.

On remplace *t* par 3 :

Le car se trouve à $s(3)=226,63$ miles au nord de la ville.

4. Une cuve contient 200 gallons d'eau au temps $t=0$ (en heures) et l'eau s'écoule au taux de $\frac{100}{\sqrt{25-t^2}}$ gallons par heure avec $0 \le t \le 4$.

   Quelle quantité d'eau y a-t-il dans la cuve à l'instant $t=4$?

   Sol : Soit $v(t)$ le volume d'eau dans la cuve à l'instant *t*. Alors $v'(t)=\frac{100}{\sqrt{25-t^2}}$.

   Ainsi, $v(t)=\int \frac{100}{\sqrt{25-t^2}}dt=-100\arcsin\left(\frac{t}{5}\right)+C$.

   Comme $v(0)=C$ et que l'on sait que $v(0)=200$, on en déduit que $C=200$.

   D'où $v(t)=-100.\arcsin\left(\frac{t}{5}\right)+200$.

   On remplace *t* par 4 :

   Il y a $v(4)=107,27$ gallons d'eau dans la cuve.

5. Un objet en mouvement est tel que sa vitesse après *t* minutes est donnée par $v(t)=1+4t+3t^2$ m/minute.

   Jusqu'où l'objet ira-t-il pendant la 3e minute ?

   Sol : Soit $s(t)$ le déplacement de l'objet après *t* minutes.

   Ainsi, $s'(t)=v(t)$.

   D'où $s(t)=\int v(t)\,dt=t+2t^2+t^3+C$.

   Durant la 3e minute : $s(3)-s(2)=30$ mètres.

6. On estime que dans *t* années, à partir d'aujourd'hui, la population d'une certaine communauté en bord de lac évoluera au taux de $0,6t^2+0,2t+0,5$ milliers de personnes par an.

   Des environnementalistes ont déterminé que le niveau de pollution du lac augmente le taux d'environ 5 unités pour 1000 habitants.

   De combien augmentera la pollution du lac durant les 2 prochaines années ?

   Sol : Soit $P(t)$ la population en fonction du temps *t*, en années.

   Ainsi, $P'(t)=0,6t^2+0,2t+0,5$

   D'où $P(t)=\int P'(t)\,dt=0,2t^3+0,1t^2+0,5t+C$.

Durant les deux prochaines années, la population augmentera de $P(2)-P(0)=3$ milliers de personnes.

La pollution dans le lac augmentera donc de 3.5=15 unités.

7. Une voiture roule sur une route plane et rectiligne à une vitesse de 105,84 km/h et commence en $t=0$ seconde un freinage progressif selon une accélération $a=0,3.t$ (dans le sens opposé à celui de la vitesse). Le temps t est exprimé en secondes et l'accélération a en m/s².

   Quelle est la longueur du freinage ?

   Pour rappels, $a(t)=v'(t)=x''(t)$ où $a(t),v(t)$ et $x(t)$ sont respectivement l'accélération, la vitesse et la position de la voiture exprimées en fonction du temps.

8. Une voiture s'apprête à effectuer un test d'accélération. A l'instant $t=0$, le pilote dé marre et accélère pendant 1000 mètres. On admettra qu'à tout instant t, la vitesse (en m/s) de la voiture est donnée par la fonction $v(t)=68\left(1-e^{\frac{-t}{18}}\right)$.

   (1) Vérifie qu'à l'instant $t=0$, la voiture est immobile.
   (2) Quelle est la vitesse atteinte par la voiture au bout de 10 secondes ?
   (3) Quelle est la vitesse maximale théorique de la voiture ?
   (4) Au bout de combien de temps franchit-on la barre des 200 km/h ?
   (5) Quelle est la vitesse moyenne de la voiture sur les 30 premières secondes ?
   (6) Quelle est la distance parcourue pendant les 30 premières secondes ?

   On modifie la transmission de la voiture en installant une boîte de vitesse plus courte et on recommence l'expérience. La vitesse est désormais donnée par $w(t)=65\left(1-e^{\frac{-t}{15}}\right)$.

   Reprendre les questions (1) à (6) avec ces nouveaux réglages.

9. Un moteur de compétition a une courbe de puissance (en kW) que l'on a réussi à modéliser sur l'intervalle $[1000;9500]$ par la fonction $P(t)=\frac{10500-t}{15000}.e^{\frac{t}{1600}+3}$ où t est le régime moteur, exprimé en tours/minute.

   (1) Quelle est la puissance à 1000 tr/min ?
   (2) Quelle est la puissance à 8500 tr/min ?

(3) Pour quel régime moteur la puissance est-elle maximale ? Quelle est cette puissance ?

(4) Vérifie que la fonction $f(t)=\dfrac{19\,360\,500-1600t}{15\,000}.e^{\frac{t}{1600}+3}$ est une primitive de *P*.

(5) Le moteur est principalement utilisé dans un régime compris entre 7000 et 9000 tr/min. calcule sa puissance moyenne sur cette plage.

10. La température *f* en degrés Celsius (°C) du lubrifiant d'un moteur varie en fonction du temps *t* de fonctionnement exprimé en heures.

La fonction f est définie pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(t)=30-10.e^{-0,1t}$.

(1) Détermine la température du lubrifiant à l'arrêt.

(2) Détermine la température du lubrifiant au bout de 24 heures.

(3) Détermine $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$. Donne une interprétation graphique du résultat obtenu ainsi qu'une interprétation concrète pour le lubrifiant.

(4) Calcule $f'(t)$ et donne le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

(5) Représente la fonction dans un repère.

(6) A quel instant la température du lubrifiant est-elle de 28°C ? Donne une valeur approchée à l'heure près puis à la minute près du résultat.

(7) Calcule la température moyenne du lubrifiant entre la cinquième et la dixième heure de fonctionnement.

(D'après BAC GMA 2010)

11. Détermine *a* pour que les courbes $f(x)=\ln x$ et $g(x)=a\sqrt{x}$ soient tangentes.

Calcule ensuite l'aire du pseudo-triangle formé par ces deux courbes et l'axe des *x*.

Sol : $a=\dfrac{2}{e}$ et $A=5\,\text{u.a.}$

12. Calcule $\int\sqrt{1-x^2}\,dx$. $\qquad =\dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x\right)+C$

Déduis-en $\int\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. $\qquad =\dfrac{1}{2}\left(\arcsin x-x\sqrt{1-x^2}\right)+C$

Soit $f(x)=\int_0^x \frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}}du$. Calcule $f'\left(\frac{1}{2}\right)$. $=\frac{\sqrt{3}}{6}$

13. On considère les intégrales $I_n\left(n\in\mathbb{N}\right)$ définies par : $I_n=\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx$.

(1) Calcule I_0 et I_1.

(2) Montre que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $I_{n+1}=\left(n+1\right)I_n$.

(3) Des points précédents, déduis l'expression de I_n en fonction de *n*.

(Simulation d'examen d'admission aux études d'ingénieur civil, Ulg, Avril 2016)